1 保険数理の基礎

現在、保険契約には多数の種類が存在しているが、これらは基本的な契約を組み合わせたものと考えられる。最も基本的な契約内容として、被保険者の死亡を条件に保険金が支払われる定期保険がある。またこれとは逆に、年金契約は被保険者の生存を条件に年金が支払われる契約である。

このような契約の保険料を合理的に定めるにはどうすれば良いかを考えることが保険数理では重要となる。保険数理上興味があるのは、被保険者の余命であるが、これを確率変数と捉えることにより、確率論の様々な考え方を用いることができるようになる。

ここでは、保険数理の初歩的な部分と確率論との対応を考える。

1.1 基本的な生命関数

x を非負の実数とし、x 歳の生存者（つまり生まれてから x 年経過した生存者）を (x) で表す。x の余命を確率変数と考え、$T(x)$ で表す。以下、余命は生存者についてのみ考えるものとし、$T(x) > 0$ とする。

保険数理において興味があるのは、死亡がどの時点でどの程度起こり得るかということである。そこで正なる実数 t に対して、確率 $P(T(x) < t)$ を考える必要がある。これは (x) が t 年以内に死亡する確率であり、${}_tq_x$ と書く。

${}_tq_x$ が与えられれば保険数理上重要な種々の関数が定義できる。これらは生命関数と呼ばれる。例えば (x) が t 年後に生存している確率は $1 - {}_tq_x$ で、これを ${}_tp_x$ と書く。${}_1q_x$ や ${}_1p_x$ は単にそれぞれ q_x, p_x と書く。主な生命関数を 1.3 節に掲げた。以後、1.3 節の内容を断りなく用いる場合があるので、適宜参照して欲しい。

さて、${}_tq_x$ や ${}_tp_x$ を定義通りに解釈すると、この値を知るためには t 年間の観察が必要となる。ただ、これでは実用的でないので、実際は次の両立条件を課す：

$$P(T(x) \geq t) = P(T(0) \geq x + t \mid T(0) \geq x). \tag{1.1}$$

$T(x)$ の分布が $T(0)$ の分布を用いて記述できるということは、暦年によらない静的な死亡モデルを考えているといえる。

(x) の t 年後の生死を表す確率をまとめておくと、死亡に関する概観が得られ便利である。これには生命表が使われる。生命表は表 1 のような形をしている。

新たな生命関数を用いたが、$\mathring{e}_x, L_x, T_x$ に関しては 1.3 節で述べることとし、ここでは生命表の作成手順について述べることを通じて、l_x, d_x について解説する。

x	q_x	l_x	d_x	$\mathring{e}_x$	L_x	T_x
0	q_0	l_0	d_0	$\mathring{e}_0$	L_0	T_0
1	q_1	l_1	d_1	$\mathring{e}_1$	L_1	T_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

表 1　生命表の概形

生命表は (0) の集団について、与えられた死亡確率に従う人数の減少を表したものである。集団の初期の人数を l_0 人とする[*1]。つまり、l_0 人が同時に生まれたと考える。l_0 人の集団は時間の経過につれ、死亡により人数が減少するが、x 年後に生存している人数を l_x で表す。更に l_x の内で、一年以内に死亡する人数を d_x とする。定義により

$$l_x - d_x = l_{x+1}$$

である。

生命表を作成するにあたっては各年齢毎の死亡確率 $\{q_x\}$ と l_0 とが所与である。ここから $\{l_x \mid x = 1, 2, \dots\}$ と $\{d_x \mid x = 0, 1, \dots\}$ とを求める必要がある。これらはそれぞれ

$$\frac{l_x}{l_0} = {}_xp_0 = \prod_{k=0}^{x-1} p_k,$$
$$\frac{d_x}{l_x} = q_x$$

から求められる。

l_x, d_x を、与えられた死亡確率に従って死亡が起こるものと仮定したときの生存数、死亡数と定めたが、この意味をより明確にしよう。x 歳の生存数を $\tilde{l}_x$、x 歳と $x+1$ 歳との間の死亡数を $\tilde{d}_x$ とする。$\tilde{l}_x, \tilde{d}_x$ はそれぞれ二項分布 $B(l_0, {}_xp_0), B(l_0, {}_{x|}q_0)$ に従う確率変数と考えることができる。従ってそれぞれの期待値は

$$E[\tilde{l}_x] = l_0 {}_xp_0 = l_x,$$
$$E[\tilde{d}_x] = l_0 {}_{x|}q_0 = l_0({}_xp_0 - {}_{x+1}p_0) = l_x - l_{x+1} = d_x$$

となる。つまり l_x とは x 歳の生存数の期待値であり、d_x とは x 歳と $x+1$ 歳との間の死亡数の期待値である。

[*1] 通常 $l_0 = 100,000$ とされる。

以下、${}_tq_x$ は t,x に関して滑らかな関数とする。$T(x)$ の累積分布関数が ${}_{\cdot}q_x : t \mapsto {}_tq_x$ であることを用いて、$T(x)$ の確率密度関数を求める。このため $({}_{t+dt}q_x - {}_tq_x)/dt$ について考えると、これは

$$\frac{{}_{t+dt}q_x - {}_tq_x}{dt} = \frac{{}_tp_x - {}_{t+dt}p_x}{dt} = {}_tp_x \frac{{}_{dt}q_{x+t}}{dt} \tag{1.2}$$

と変形できる。新たな量 ${}_{dt}q_x/dt$ が現れたが、これは $dt \to 0$ の極限で (x) の瞬間的な死亡確率の趨勢を表していると考えられる。この極限を μ_x とおき、x 歳の死力と呼ぶ：

$$\mu_x := \lim_{dt \to 0} \frac{{}_{dt}q_x}{dt}. \tag{1.3}$$

これを用いれば、先程の変形から、$T(x)$ の確率密度関数が ${}_{\cdot}p_x\mu_{x+\cdot} : t \mapsto {}_tp_x\mu_{x+t}$ であることがわかる。

生命表について述べたときに触れなかった平均余命を定義する。L_x, T_x については 1.3 節で説明する。x 歳の平均余命 $\mathring{e}_x$ とは、その名の示す通り x 歳の余命 $T(x)$ の期待値 $E[T(x)]$ である。今や $T(x)$ の確率密度関数はわかっているので

$$\mathring{e}_x := E[T(x)] = \int_0^\infty t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt$$

と表すことができる。これは、(1.2) からすぐわかる関係式：

$$\frac{\partial_t p_x}{\partial t} = -{}_tp_x\mu_{x+t}$$

を用いれば、部分積分により

$$\mathring{e}_x = \int_0^\infty {}_tp_x dt$$

と変形できる。年齢の上限（最終年齢）をどう設定するかは重要な問題であり、生物学的な限界を調べる研究や、統計的に限界を見積もる研究など様々なものがある。

0 歳の平均余命は特に平均寿命と呼ばれ、総合的な健康指標として重要である。よく、自分が今 60 歳で平均寿命が 80 歳だから後 20 年は生きられる、といった話を聞く。これは $\mathring{e}_{60} = \mathring{e}_0 - 60$ に基づいている訳だが、この式は成り立たない。60 歳になるまで生存している確率やそれまでの死亡者を考えていないからであり、実際には $\mathring{e}_{60} > \mathring{e}_0 - 60$ が成り立つ。つまり平均的に 20 年以上生きることができる。より一般に、$x < y$ に対して

$$\mathring{e}_x - \mathring{e}_y < y - x$$

が成り立つ。これは

$$
\begin{aligned}
\mathring{e}_x - \mathring{e}_y &= \int_0^\infty {}_tp_x dt - \int_0^\infty {}_tp_y dt \\
&= \int_0^\infty {}_tp_x dt - \int_0^\infty \frac{{}_{y-x+t}p_x}{{}_{y-x}p_x} dt \\
&< \int_0^\infty {}_tp_x dt - \int_0^\infty {}_{y-x+t}p_x dt \\
&= \int_0^{y-x} {}_tp_x dt \\
&< y - x
\end{aligned}
$$

からわかる。

1.2 保険料

保険契約は、保険金の支払われる条件（保険事故）や時期によって特徴付けられる。保険契約の売り手（例えば保険会社）を保険者、買い手（例えば個人）を被保険者と呼ぶ。保険料は、被保険者が保険事故発生時に保険金の支払いを受けるために、保険者に支払う手数料と考えることができる。保険者の事業コストを考えずに計算された手数料を純保険料と呼ぶ。純保険料は払い込みの方法によって異なるが、ここでは一括して支払う方法での純保険料（一時払純保険料）について考えることとにする。

純保険料の計算方法として「収支相等の原則」と呼ばれるものがある。これは保険者の収入（純保険料）の期待値と支出（保険金）の期待値とが相殺するように定める方法で、一時払純保険料に限れば、「一時払純保険料は支払われる保険金の現価の期待値である」といえる。

現在価値は、異なる時点での価値を比較するための概念で、将来の価値を現在の価値に割り引いて計算したものである。例えば現時点での 100 万円と 1 年後の 100 万円とでは、利率の影響で前者の方が価値が高い。保険者は運用利率を設定して、純保険料を計算する。この利率を予定利率と呼ぶ。予定利率を年利 r としたときの n 年後の S 円の現価は $(1+r)^{-n}S$ 円と計算できる。予定利率を大きく設定すれば現価は低くなり、小さく設定すれば高くなる。

以下、契約内容などについては二見 [2] に従って、代表的な保険契約の一時払純保険料を計算する。

1.1［例］ x 歳加入の被保険者が n 年後に生存していることを条件に保険金 1 が支払わ

れる生存保険の一時払純保険料 $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ を求める。支払われる保険金の現価を X_1 とおく。これは確率変数であり、「収支相等の原則」に従えば $E[X_1]$ を求めれば良いことになる。事象 A の指示関数を χ_A で表すことにすれば、X_1 は

$$X_1 = (1+r)^{-n}\chi_{\{T(x)\geq n\}}$$

と表すことができるから

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = E[X_1] = (1+r)^{-n}P(T(x)\geq n) = (1+r)^{-n}{}_np_x$$

である。

1.2［例］　契約開始から n 年以内の、x 歳加入の被保険者の死亡を条件に、即時に保険金 1 を支払う即時払定期保険の一時払純保険料 $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ を求める。支払われる保険金の現価を X_2 とおくと

$$X_2 = (1+r)^{-T(x)}\chi_{\{T(x)<n\}}$$

である。$\chi_{\{T(x)<n\}}$ が満期の存在を表している。よって $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ は

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = E[X_2] = \int_0^n (1+r)^{-t}{}_tp_x\mu_{x+t}dt$$

となる。

1.3［例］　例 1.2 では即時払の場合を考えたが、ここでは保険金の支払いが死亡の年度末である期末払定期保険の一時払純保険料 $A^{1}_{x:\overline{n}|}$ を求める。支払われる保険金の現価を X_3 とおくと

$$X_3 = (1+r)^{-[T(x)]-1}\chi_{\{T(x)<n\}}$$

である。ここに $[t]$ は t を超えない最大の整数を表すものとする。これから $A^{1}_{x:\overline{n}|}$ は

$$\begin{aligned} A^{1}_{x:\overline{n}|} = E[X_3] &= \int_0^n (1+r)^{-[t]-1}{}_tp_x\mu_{x+t}dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}(1+r)^{-k-1}{}_tp_x\mu_{x+t}dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(1+r)^{-k-1}{}_{k|}q_x \end{aligned}$$

と求められる。

1.4［例］　契約開始から n 年間、x 歳加入の被保険者が各年度の始めに生存していることを条件に、各年度の始めに年金（普通は保険金とは呼ばない）1 を支払う期始払有期生命年金の一時払純保険料（特に年金現価と呼ばれることが多い）$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ を求める。支払われる年金の現価を X_4 とおけば

$$X_4 = \sum_{k=0}^{[T(x)]\wedge(n-1)} (1+r)^{-k} \tag{1.4}$$

である。ここに $a \wedge b = \min\{a, b\}$ である。よって $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ は

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E[X_4] &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^{[t]\wedge(n-1)} (1+r)^{-k} {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \int_j^{j+1} \sum_{k=0}^{j\wedge(n-1)} (1+r)^{-k} {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{-k} \sum_{j=k}^{\infty} \int_j^{j+1} {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{-k} {}_kp_x
\end{aligned}$$

と求められる。(1.4) の右辺の和を等比数列の和の公式を用いて変形してから期待値を考えれば

$$\begin{aligned}
\{1-(1+r)^{-1}\}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= 1 - E\Big[(1+r)^{-([T(x)]\wedge(n-1)+1)}\Big] \\
&= 1 - \int_0^\infty (1+r)^{-([t]\wedge(n-1)+1)} {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= 1 - \int_0^n (1+r)^{-[t]-1} {}_tp_x \mu_{x+t} dt - \int_n^\infty (1+r)^{-n} {}_tp_x \mu_{x+t} dt \\
&= 1 - A^{1}_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}
\end{aligned}$$

なる等式が得られる。

例 1.3,1.4 では $T(x)$ の確率密度関数を用いて式変形を行ったが、一旦 $[T(x)]$ の分布を考えてから変形した方が見通しが良い。非負の整数 k に対して

$$P([T(x)] = k) = P(k \le T(x) < k+1) = {}_{k|}q_x$$

が成り立つから

$$A^{\ 1}_{x:\overline{n}|} = E[X_3] = \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{-k-1} {}_{k|}q_x$$

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E[X_4] &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j\wedge(n-1)} (1+r)^{-k} {}_{j|}q_x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{-k} \sum_{j=k}^{\infty} {}_{j|}q_x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{-k} {}_{k}p_x\end{aligned}$$

となる。

1.3 主な生命関数

主な生命関数とそれらの間の関係式について述べる。

(x) が t 年以内に死亡する確率を ${}_tq_x$、t 年経過時点で生存している確率を ${}_tp_x$ とする。(x) が t 年間生存し、次の s 年以内に死亡する確率を ${}_{t|s}q_x$ とする。これらは $T(x)$ を用いて

$$\begin{aligned}{}_tq_x &:= P(T(x) < t), \\ {}_tp_x &:= P(T(x) \geq t), \\ {}_{t|s}q_x &:= P(t \leq T(x) < t+s)\end{aligned}$$

と定義される。${}_1q_x, {}_1p_x, {}_{t|1}q_x$ はそれぞれ $q_x, p_x, {}_{t|}q_x$ と略記される。定義から明らかに次が成り立つ：

$$\begin{aligned}{}_tq_x + {}_tp_x &= 1, \qquad (1.5) \\ {}_{t|s}q_x &= {}_tp_x - {}_{t+s}p_x, \\ {}_nq_x &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}q_x, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ {}_np_x &= \sum_{k=n}^{\infty} {}_{k|}q_x, \quad n = 1, 2, \ldots.\end{aligned}$$

更に両立条件 (1.1) を課せば

$${}_{t+s}p_x = \frac{{}_{x+t+s}p_0}{{}_xp_0} = \frac{{}_{x+t+s}p_0}{{}_{x+s}p_0} \frac{{}_{x+s}p_0}{{}_xp_0} = {}_tp_{x+s}\,{}_sp_x$$

が成り立つ。これから $n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$ {}_n p_x = \prod_{k=0}^{n-1} p_{x+k} $$

であることがわかる。

生命表の作成手順に従えば、l_x, d_x は

$$ l_{x+1} = l_x p_x, \tag{1.6} $$
$$ d_x = l_x q_x \tag{1.7} $$

と再帰的に定義される。より直接的には

$$ l_x = l_0 {}_x p_0, $$
$$ d_x = l_0 {}_{x|} q_0 $$

と定義される。(1.5),(1.6),(1.7) から

$$ l_x = l_{x+1} + d_x \tag{1.8} $$

がわかる。(1.3) で死力 μ_x を定義したが、これを用いれば $T(x)$ の確率密度関数は ${}_\cdot p_x \mu_{x+\cdot} : t \mapsto {}_t p_x \mu_{x+t}$ と表されるのであった。よって上記の生命関数は次のように表示できる：

$$ \begin{aligned} {}_t q_x &= \int_0^t {}_s p_x \mu_{x+s} ds, \\ {}_t p_x &= \int_t^\infty {}_s p_x \mu_{x+s} ds, \\ {}_{t|s} q_x &= \int_t^{t+s} {}_u p_x \mu_{x+u} du, \\ l_x &= l_0 {}_x p_0 = l_0 \int_x^\infty {}_t p_0 \mu_t dt = \int_x^\infty l_t \mu_t dt, \\ d_x &= l_x q_x = l_x \int_0^1 {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt. \end{aligned} $$

$T(x)$ の期待値は平均余命あるいは完全平均余命と呼ばれる。また、例 A.3,A.4 で用いた確率変数 $[T(x)]$ の期待値は略算平均余命と呼ばれる。略算平均余命は生存する年数の端数を切り捨てて平均したものである。これらはそれぞれ $\mathring{e}_x, e_x$ と書かれる。それぞれの

定義は以下の通り：

$$\mathring{e}_x := E[T(x)] = \int_0^\infty t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt,$$
$$e_x := E\bigl[[T(x)]\bigr] = \sum_{k=0}^\infty k\,{}_{k|}q_x.$$

これらはそれぞれ

$$\mathring{e}_x = \int_0^\infty t\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt = \Bigl[t(-{}_tp_x)\Bigr]_0^\infty + \int_0^\infty {}_tp_xdt = \int_0^\infty {}_tp_xdt, \tag{1.9}$$
$$e_x = \sum_{k=0}^\infty k\,{}_{k|}q_x = \sum_{k=1}^\infty\sum_{j=1}^k {}_{k|}q_x = \sum_{j=1}^\infty\sum_{k=j}^\infty {}_{k|}q_x = \sum_{j=1}^\infty {}_jp_x \tag{1.10}$$

と変形できる。$\mathring{e}_x$ を重積分を経由して (1.10) のように変形することもできる。また、e_x を Abel の級数変形法を用いて (1.9) のように変形することもできる。

(1.9) の両辺に l_x を乗じれば

$$l_x\mathring{e}_x = \int_0^\infty l_{x+t}dt$$

なる等式が得られる。この量は (x) の集団 l_x 人の延べ生存年数を表していると捉えることができる。これを T_x で表す。右辺の積分区間を分割して、自然数 n に対し

$${}_nL_x := \int_0^n l_{x+t}dt$$

を定義する。これは観察期間を n 年間に限った場合の延べ生存年数である。今までの記号と同様に、${}_1L_x$ を単に L_x と書く。定義から明らかに

$$T_x = \sum_{k=0}^\infty L_{x+k}$$

が成り立つ。

医療統計や生存時間解析における人年法によれば、死亡率は、観察期間中の死亡数を観察時間の合計である延べ生存年数で割ることによって定義される [1]。そこで

$$m_x := \frac{d_x}{L_x}$$

を考え、これを中央死亡率と呼ぶ。生命表は、中央死亡率を実際のデータから推定することにより作成される。

参考文献

[1] 佐藤俊哉. 宇宙怪人しまりす 医療統計を学ぶ. 岩波科学ライブラリー. 岩波書店, 2005.

[2] 二見隆. 生命保険数学 上巻. 生命保険文化研究所, 1992.