1　Greville の平滑化

生命表作成において、粗死亡率を平滑化するために Greville の 3 次 9 項式がよく用いられる。平滑化の目的は、偶然変動によって生じる隣り合う年齢間での死亡率ギャップを解消することにある。ギャップは差分を取ることで測定できるが、Greville の 3 次 9 項式は 4 階の差分を最小化するものとして特徴付けられる。以下、Shiu[1] を参考に詳説する。

データ $\{y_i\}$ を

$$\tilde{y}_i = \sum_{j=-4}^{4} a_j y_{i+j}$$

と変換する加重移動平均を考える。両辺の k 階の差分を取ると

$$\begin{aligned}\Delta^k \tilde{y}_i &= \sum_{j=-4}^{4} a_j \Delta^k y_{i+j} \\ &= \boldsymbol{a}^T D_k \boldsymbol{y}_i\end{aligned}$$

となる。ここに

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= (a_{-4}, \ldots, a_4)^T \\ \boldsymbol{y}_i &= (y_{i-4-k}, \ldots, y_{i+4})^T\end{aligned}$$

で、D_k は k 階の差分を表す行列である。Cauchy-Schwarz の不等式により

$$\left|\Delta^k \tilde{y}_i\right| = \left|(D_k^T \boldsymbol{a})^T \boldsymbol{y}_i\right| \leq \left\|D_k^T \boldsymbol{a}\right\| \|y_i\|$$

と評価できる。左辺の最小化のために、$\|D_k^T \boldsymbol{a}\|$ の最小化を考える。

3 次以下の多項式全体の成す空間は $\{1, x, x^2, x^3\}$ によって張られるが、この基底に対して

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & (-4)^2 & (-4)^3 \\ 1 & -3 & (-3)^2 & (-3)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \end{pmatrix}$$

とおく。また $e = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$ とおく。

Greville の 3 次 9 項式は移動平均の一種であり、その重み $\boldsymbol{a}$ は以下の最適化問題の解として得られる：

$$\begin{aligned}&\text{Minimize} && \left|D_4^T \boldsymbol{a}\right|, \\ &\text{subject to} && P^T \boldsymbol{a} = P^T e.\end{aligned}$$

Lagrange の未定乗数 λ を用いて Lagrangian L を

$$L(\boldsymbol{a}, \lambda) = \left\|D_4^T \boldsymbol{a}\right\|^2 - \lambda P^T (\boldsymbol{a} - e)$$

で定める。$\boldsymbol{a}$ による微分が 0 となるような $\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\lambda}$ は

$$2 D_4 D_4^T \hat{\boldsymbol{a}} = -P \hat{\lambda}$$

を充たす。$D_4 D_4^T$ は可逆だから

$$\hat{\boldsymbol{a}} = -\frac{1}{2}\bigl(D_4 D_4^T\bigr)^{-1} P \hat{\lambda}$$

がわかるが、この両辺に左から P^T を乗じることで

$$-\frac{1}{2} P^T \bigl(D_4 D_4^T\bigr)^{-1} P \hat{\lambda} = P^T \hat{\boldsymbol{a}} = P^T e$$

を得る。最後の等式では L の λ による微分が 0 となることを用いている。これから

$$\hat{\lambda} = -2\Bigl(P^T \bigl(D_4 D_4^T\bigr)^{-1} P\Bigr)^{-1} P^T e$$

がわかる。重み $\hat{\boldsymbol{a}}$ は

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \bigl(D_4 D_4^T\bigr)^{-1} P \Bigl(P^T \bigl(D_4 D_4^T\bigr)^{-1} P\Bigr)^{-1} P^T = \frac{1}{2431}\begin{pmatrix} -99 \\ -24 \\ 288 \\ 648 \\ 805 \\ 648 \\ 288 \\ -24 \\ -99 \end{pmatrix}$$

である。

参考文献

[1] Elias S. W. Shiu. Minimum-R_z moving-weighted-average formulas. *Transactions of Society of Actuaries*, Vol. 36, pp. 489–500, 1984.