

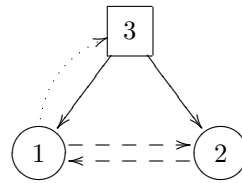
1 Golubitsky-Stewart の Coupled Cell Network

1.1 Coupled Cell Network

各素子の内在的な振る舞いの情報はあまり使わず、network の空間的構造のみから、その dynamics について調べる。

この節で扱う “coupled cell network” の定義を与える前に、例を一つ挙げる。

1.1 [例] 次のような network を考える：



cell に 2 種類あるが、同じ形のもは同じタイプの cell だと思える。edge に関しても同様である。各 cell がどの cell から影響を受けているかを考えれば、この network に付随する ODE は次のような形をしているであろう：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= g(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 &= g(x_2, x_1, x_3) \\ \dot{x}_3 &= h(x_3, x_1)\end{aligned}$$

cell 1 と 2 に同じ関数 g が現れていることに注意。 ■

上で見たように、取り敢えずは cell と edge があれば良いのだが、たとえ名前が異なっても、同じような cell は同じものとして扱いたいし、同じ影響を及ぼす関係に対する edge は同じものとして扱いたい。

そこで、同値関係付き有向グラフ $G = (\mathcal{C}, \mathcal{E}, \sim_{\mathcal{C}}, \sim_{\mathcal{E}})$ を考える。 $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, N\}$ は cell の有限集合であり、 $c \in \mathcal{C}$ の $\sim_{\mathcal{C}}$ -同値類を $[c]_{\mathcal{C}}$ と書くことにする。また、 \mathcal{E} は edge の有限集合であり、 $e \in \mathcal{E}$ の $\sim_{\mathcal{E}}$ -同値類を $[e]_{\mathcal{E}}$ と書くことにする。 $e \in \mathcal{E}$ には両端の cell が存在し、しかも e には向きが備わっているため、その「矢先」と「矢筈」が区別できる。「矢先」の cell を e の head と呼び、「矢筈」の cell を tail と呼ぶ。これで、 e にその head を対応させる写像 $\mathcal{H} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ 、およびその tail を対応させる写像 $\mathcal{T} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ が定義できる。

ここで、この \mathcal{H} と \mathcal{T} に functoriality を課す。つまり、 $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ に対し

$$e_1 \sim_{\mathcal{E}} e_2 \implies \mathcal{H}(e_1) \sim_{\mathcal{C}} \mathcal{H}(e_2), \mathcal{T}(e_1) \sim_{\mathcal{C}} \mathcal{T}(e_2)$$

であることを要請する。これは、同じような働きは、やはり同じようなものの中のみ存在する、と解釈できる。この条件を consistency condition と呼ぶ。

1.2 [定義] (coupled cell network) coupled cell network とは、consistency condition を満たす同値関係付き有向グラフ $G = (\mathcal{C}, \mathcal{E}, \sim_{\mathcal{C}}, \sim_{\mathcal{E}})$ のことである。 ◇

1.3 [注意] $e \in \mathcal{E}$ について、その head と tail が同じものであっても良い (self-coupling は許す)。また、head と tail がそれぞれ一致するような二つの edge が、違うものであっても良い (つまり、cell の二つ組みの間に、何本もの edge が存在しても良い)。 *

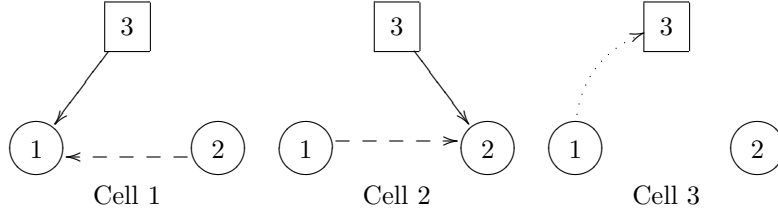
各 cell が、どの cell から影響を受けているかという情報は重要である：

1.4 [定義] (input set) $c \in \mathcal{C}$ に対し、 c を tail とするような edges 全体を input set と呼び、 $I(c)$ と書く：

$$I(c) := \{e \in \mathcal{E} \mid \mathcal{H}(e) = c\}.$$

$I(c)$ の元は c の input edge だとか input arrow だとか呼ばれる。◇

例 1.1 で見たように、input set は G に付随する ODE の形を決める。例 1.1 の各 cell の input set を図示すれば、次のようになる：



これを見れば、Cell 1 と Cell 2 とが同じような働きを受けていることがわかる。この観点で Cell 1 と Cell 2 とを同一視したい：

1.5 [定義] (input equivalence) $c, d \in \mathcal{C}$ に対し、 $I(c)$ と $I(d)$ との間に「arrow の種類を変えない」全単射 β が存在するとき、 $c \sim_I d$ と記す。 $\beta: I(c) \rightarrow I(d)$ が「arrow の種類を変えない」とは、任意の $i \in I(c)$ に対し、 $i \sim_{\mathcal{E}} \beta(i)$ となることである。この \sim_I は、明らかに \mathcal{C} 上の同値関係であり、これを \mathcal{C} 上の input equivalence と呼ぶ。またこのような β を、 c から d への input isomorphism と呼ぶ。◇

1.6 [注意] consistency condition により、「同じような働きは、やはり同じようなものの中のみ存在する」のだから、 $c \sim_I d$ ならば $c \sim_{\mathcal{C}} d$ でなければならない。★

$c, d \in \mathcal{C}$ に対し、 c から d への input isomorphism 全体の集合を $B(c, d)$ とする：

$$B(c, d) := \{\beta: I(c) \rightarrow I(d); \text{input isomorphism}\}.$$

任意の $c \in \mathcal{C}$ について、 $B(c, c)$ は $I(c)$ に作用する置換群であるが、これを c の vertex group と呼ぶ。

明らかに、 $c \sim_I d$ のとき、またそのときに限り $B(c, d) \neq \emptyset$ である。更に

$$\mathcal{B}_G := \bigcup_{c, d \in \mathcal{C}} B(c, d)$$

とおく。 \sim_I の意味を考えれば、これが network の対称性を表していると考えるのは自然である。 \mathcal{B}_G は、input isomorphism を morphism とする groupoid である。 \mathcal{B}_G を network の symmetry groupoid と呼ぶ。

1.2 Coupled Cell System (G -Admissible Vector Field)

与えられた network に対応する ODE として、どのようなものが適切かを考える。

各 $c \in \mathcal{C}$ に対し、cell phase space P_c を定義する。一般には 1 次元以上の smooth な多様体を仮定するが、ここでは簡単のため、有限次元の実ベクトル空間としておく。 $c \sim_{\mathcal{C}} d$ なる c, d に対しては、 $P_c = P_d$ とする。

これは、 \sim_c -同値な cell は同種の phase space を持つということであるが、その構造が同じであるということまでは要請しない。

これを用いて、total phase space を

$$P := \prod_{c \in \mathcal{C}} P_c$$

と定義し、 $x \in P$ の成分を

$$x = (x_c)_{c \in \mathcal{C}}$$

と表示する。

もっと一般に、 s 個の cell の順序集合 $\mathcal{D} = (d_1, d_2, \dots, d_s)$ に対し

$$P_{\mathcal{D}} := P_{d_1} \times P_{d_2} \times \dots \times P_{d_s}$$

と、多重指数のような記法を用いることにする。各 cell $c \in \mathcal{C}$ に対し、 P_c を internal phase space、 $P_{\mathcal{T}(I(c))}$ を coupling phase space と呼ぶ。名前の意味は明らかであろう。ここに $\mathcal{T}(I(c))$ は、 $I(c)$ に属する edge の tail から成る順序集合である。

$x \in P_{\mathcal{D}}$ が、 $d \in \mathcal{D}$ に対し $d \xrightarrow{x} x_d$ と作用していると考えれば、input isomorphism による引き戻しが自然に定義できる。 $\beta : I(c) \rightarrow I(d)$ に対し、その pullback map $\beta^* : P_{\mathcal{T}(I(d))} \rightarrow P_{\mathcal{T}(I(c))}$ を

$$(\beta^* x)_{\mathcal{T}(i)} := x_{\mathcal{T}(\beta(i))}, \quad x \in P_{\mathcal{T}(I(d))}, \quad i \in I(c)$$

で定める。図式を用いれば

$$\begin{array}{ccc} i & \xrightarrow{\beta} & \beta(i) \\ & \downarrow \mathcal{T} & \\ \mathcal{T}(i) & \xrightarrow{\sim_c} & \mathcal{T}(\beta(i)) \\ \downarrow P_{\mathcal{T}(I(c))} \ni \beta^* x & \xleftarrow{\beta^*} & \downarrow x \in P_{\mathcal{T}(I(d))} \\ (\beta^* x)_{\mathcal{T}(i)} & \xlongequal{\quad} & x_{\mathcal{T}(\beta(i))} \end{array}$$

となる。

1.7 [定義] (G -admissible vector field) ベクトル場 $f : P \rightarrow P$ が次の二つの条件を充たすとき、 f は G -admissible であるという：

(a)[domain condition] 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対し、 c -成分 $(f(x))_c = f_c(x)$ は、internal phase space の元 x_c と coupling phase space の元 $x_{\mathcal{T}(I(c))}$ のみに依る。つまり $\hat{f}_c : P_c \times P_{\mathcal{T}(I(c))} \rightarrow P_c$ で

$$f_c(x) = \hat{f}_c(x_c, x_{\mathcal{T}(I(c))})$$

なるものが存在する。

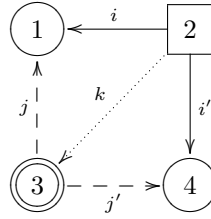
(b)[pullback condition] 任意の $c, d \in \mathcal{C}$ 及び任意の $\beta \in B(c, d)$ に対し

$$\hat{f}_d(x_d, x_{\mathcal{T}(I(d))}) = \hat{f}_c(x_d, \beta^* x_{\mathcal{T}(I(d))})$$

が成り立つ。 ◇

条件 (a) で求められていることは明らかだが、条件 (b) は pullback についての理解が不十分であると、言っていることがわからない。そこで、具体的な例を用いて、条件 (b) の意味するところを考えてみたい。

1.8 [例] 次のような network を考える：



各々の cell についての input set 及びその tail は次の通り：

$$I(1) = \{i, j\}, \quad \mathcal{T}(I(1)) = \{2, 3\},$$

$$I(2) = \emptyset, \quad \mathcal{T}(I(2)) = \emptyset,$$

$$I(3) = \{k\}, \quad \mathcal{T}(I(3)) = \{2\},$$

$$I(4) = \{i', j'\}, \quad \mathcal{T}(I(4)) = \{2, 3\}.$$

この network に許容されるような vector field f を考える。まず、domain condition により

$$f_1(x) = \hat{f}_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$f_2(x) = \hat{f}_2(x_2)$$

$$f_3(x) = \hat{f}_3(x_3, x_2)$$

$$f_4(x) = \hat{f}_4(x_4, x_2, x_3)$$

と表されるようなものでなければならない。更に、Cell 1 と Cell 4 とは \sim_I -同値であるから、pullback condition を考慮しなければならない。input isomorphism を β とすると、 $x \in P_2 \times P_3$ に対し

$$\begin{array}{ccc}
 i \xrightarrow{\beta} i' & & j \xrightarrow{\beta} j' \\
 \downarrow \mathcal{T} & & \downarrow \mathcal{T} \\
 2 \xrightarrow{\sim_c} 2 & & 3 \xrightarrow{\sim_c} 3 \\
 \downarrow & \xleftarrow{\beta^*} & \downarrow \\
 P_2 \times P_3 \ni \beta^* x & & x \in P_2 \times P_3 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\beta^* x)_2 & \xlongequal{\quad} & x_2 \\
 & & \\
 & & \downarrow \\
 & & P_2 \times P_3 \ni \beta^* x \\
 & & \downarrow \\
 & & (\beta^* x)_3 \\
 & & \xlongequal{\quad} \\
 & & x_3
 \end{array}$$

すなわち $\beta^* x = (x_2, x_3)$ である。よって pullback condition は

$$\hat{f}_1(x_1, x_2, x_3) = \hat{f}_4(x_1, x_2, x_3)$$

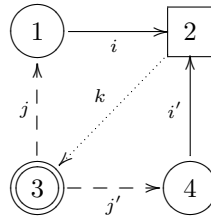
$$\hat{f}_4(x_4, x_2, x_3) = \hat{f}_1(x_4, x_2, x_3)$$

となる。これはつまり

$$\begin{aligned} f_1(x) &= g(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x) &= \hat{f}_2(x_2) \\ f_3(x) &= \hat{f}_3(x_3, x_2) \\ f_4(x) &= g(x_4, x_2, x_3) \end{aligned}$$

と表すことのできる $g: P_1(=P_4) \times P_2 \times P_3 \rightarrow P_1(=P_4)$ が存在しなければならない、ということの意味している。 ■

1.9 [例] 例 1.8 で、 i, i' の向きを逆にした network を考える：



このとき、各々の cell について

$$\begin{aligned} I(1) &= \{j\}, & \mathcal{T}(I(1)) &= \{3\}, \\ I(2) &= \{i, i'\}, & \mathcal{T}(I(2)) &= \{1, 4\}, \\ I(3) &= \{k\}, & \mathcal{T}(I(3)) &= \{2\}, \\ I(4) &= \{j'\}, & \mathcal{T}(I(4)) &= \{3\}. \end{aligned}$$

となる。 $B(1, 4)$ は先程と同じく一つの元のみから成るが、今回は $B(2, 2)$ が自明な群でない。 i と i' とを置換する input isomorphism を β とすれば、 $x = (x_1, x_4) \in P_1 \times P_4$ に対し、 $\beta^*x = (x_4, x_1)$ となる。このことから、この network に付随する ODE は

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, x_3) \\ \dot{x}_2 &= g(x_2, \overline{x_1, x_4}) \\ \dot{x}_3 &= h(x_3, x_2) \\ \dot{x}_4 &= f(x_4, x_3) \end{aligned}$$

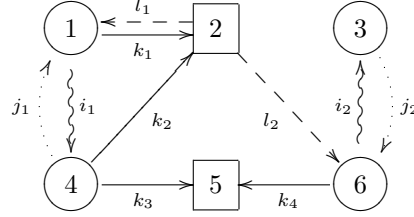
という形をしていることがわかる。ここに、 g の第 2 成分と第 3 成分との上の線は、成分の置換によって g が不変であることを意味する。すなわち g は $g(u, v, w) = g(u, w, v)$ なるものである。 ■

例 1.8 から、 G -admissible vector field f は、 \sim_I -同値類上で写像を定めれば決定されることが見て取れる。もし、任意の $c, d \in \mathcal{C}$ に対して $B(c, d) \neq \emptyset$ であるなら（このような network は homogeneous と呼ばれる）任意に選んだ一つの cell 上で写像を定めれば良いことになる。というのも、 G が homogeneous なら、すべての cell が \sim_I -同値であり、 \sim_I -同値な cell の上では同じ写像でなければならないからである。例 1.9 で見たように $c \sim_I c$ という自明な同値関係に着目することで、 f_c が c の vertex group $B(c, c)$ による作用で不変であることがわかる。 c の vertex group が及ぼす f_c への作用とは、 \sim_ε -同値と両立するような edge の入れ替えから起こる変数の入れ替えのことである。逆に、上記の条件を充たすように、各 \sim_I -同値類の代表元上で写像を定めれば、pullback を通じることで、 G -admissible vector field が一意に形成される。

coupled cell network 上の admissible vector field から定まる ODE を coupled cell system と呼ぶ。例 1.1 で、厳密性を欠きながら指定した ODE は、確かに coupled cell system となっている。

最後に、次の節で扱う内容の動機付けとなるような例を挙げる。

1.10 [例] 次のような network を考える：



input setなどは以下の通り：

Cell	1		2		3	4	5		6	
$I(\cdot)$	j_1	l_1	k_1	k_2	i_2	i_1	k_3	k_4	j_2	l_2
$T(I(\cdot))$	4	2	1	4	6	1	4	6	3	2

vertex group は $B(2,2) = B(5,5) = S_2$ で、その他は自明。異なる cell 間の input morphism については、 $B(1,6), B(3,4)$ は 1 点集合、 $B(2,5)$ は 2 点集合であり、その他の組み合わせに関しては存在しない。以上により、この network に関する coupled cell system は、cell phase space を $V = P_1 = P_3 = P_4 = P_6, W = P_2 = P_5$ とすると

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_4, x_2) \\ \dot{x}_2 = g(x_2, \overline{x_1}, \overline{x_4}) \\ \dot{x}_3 = h(x_3, x_6) \\ \dot{x}_4 = h(x_4, x_1) \\ \dot{x}_5 = g(x_5, \overline{x_4}, \overline{x_6}) \\ \dot{x}_6 = f(x_6, x_3, x_2) \end{cases} \quad \begin{cases} f : V \times V \times W \longrightarrow V, \\ g : W \times V \times V \longrightarrow W, \\ h : V \times V \longrightarrow V \end{cases}$$

という形をしていることがわかる。total phase space $P = V \times V \times W \times W \times V \times V$ の polydiagonal subspace $\{x_1 = x_6, x_2 = x_5, x_3 = x_4\}$ が G -admissible vector field に対し不変であるという認識は重要である。これは、このような同期状態が flow-invariant であることを意味する。 ■

1.3 Balanced Equivalence Relations

例 1.10 で、flow-invariant な同期状態を見たが、「同期している」という関係を coupled cell network の言葉を使って、どのように述べれば良いだろうか。また、その同期状態が flow-invariant であるための条件はどのようなものだろうか。

まず cell を「色分け」する。厳密には、 \mathcal{C} を分割することで、これに対応した同値関係が定まるが、これを color 同値と呼び、 \bowtie と表すことにするのである。但し \bowtie -同値であれば、必ず $\sim_{\mathcal{C}}$ -同値であるようにする。 \bowtie によって決まる polysynchronous subspace を

$$\Delta_{\bowtie} := \{x = (x_c)_{c \in \mathcal{C}} \in P \mid c \bowtie d \implies x_c = x_d\}$$

で定義する。条件中の等号は、 \bowtie が \sim_C の refinement であるから意味を持つ。従って考えるべきことは、 G -admissible vector field f に対して Δ_{\bowtie} がいつ f -不変になるのか、ということである。

例 1.10 で考えたことは、 $\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$ なる分割を考えることに対応する。このような分割に対して、 $\Delta_{\bowtie} = \{(v_1, v_2, w, w, v_2, v_1)\}$ は不変であった。もしこの分割を $\{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4, 6\}$ などと変えたとする、付随する G -admissible vector field は変わらないが、polysynchronous subspace は最早不変でなくなる。この違いは、 $c \in C$ の color 同値類を \bar{c} と記すことにし、例 1.10 で見たような $I(\cdot), T(I(\cdot))$ に関する表を書けば良くわかる：

	Cell	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4} = \bar{3}$	$\bar{5} = \bar{2}$	$\bar{6} = \bar{1}$				
$\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$	$I(\cdot)$	j_1	l_1	k_1	k_2	i_2	i_1	k_3	k_4	j_2	l_2
	$T(I(\cdot))$	$\bar{4} = \bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{4} = \bar{3}$	$\bar{6} = \bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{4} = \bar{3}$	$\bar{6} = \bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$
	Cell	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4} = \bar{3}$	$\bar{5} = \bar{2}$	$\bar{6} = \bar{3}$				
$\{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4, 6\}$	$I(\cdot)$	j_1	l_1	k_1	k_2	i_2	i_1	k_3	k_4	j_2	l_2
	$T(I(\cdot))$	$\bar{4} = \bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{4} = \bar{3}$	$\bar{6} = \bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4} = \bar{3}$	$\bar{6} = \bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$

これは、 $\bar{1} = \circ, \bar{2} = \blacksquare, \bar{3} = \bullet$ などと書けば、更に顕著となる：

	Cell	\circ	\blacksquare	\bullet	\bullet	\blacksquare	\circ				
$\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$	$I(\cdot)$	j_1	l_1	k_1	k_2	i_2	i_1	k_3	k_4	j_2	l_2
	$T(I(\cdot))$	\bullet	\blacksquare	\circ	\bullet	\circ	\circ	\bullet	\circ	\bullet	\blacksquare
	Cell	\circ	\blacksquare	\bullet	\bullet	\blacksquare	\bullet				
$\{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4, 6\}$	$I(\cdot)$	j_1	l_1	k_1	k_2	i_2	i_1	k_3	k_4	j_2	l_2
	$T(I(\cdot))$	\bullet	\blacksquare	\circ	\bullet	\bullet	\circ	\bullet	\bullet	\bullet	\blacksquare

この考察から、次のような \bowtie について考えることは有益であろう：

1.11 [定義] (balanced equivalence relations) $c \bowtie d$ なる任意の $c, d \in C$ について

$$\exists \beta \in B(c, d) \text{ s.t. } \forall e \in I(c). T(e) \bowtie T(\beta(e))$$

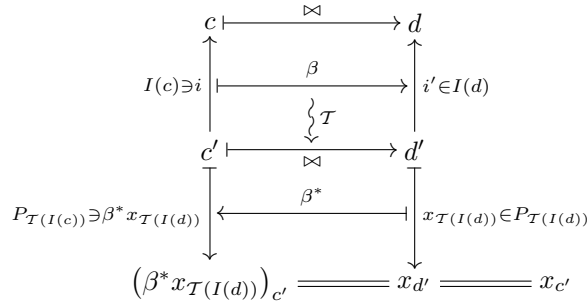
が成り立つとき、 \bowtie は balanced であるという。◇

この条件中でその存在が要求されている input isomorphism を color-preserving であるということにする。

1.12 [注意] 定義から明らかであるが、balanced な \bowtie は \sim_I の refinement である。★

\bowtie は balanced であり、 $c \bowtie d$ とする。このとき $I(c)$ から $I(d)$ への color-preserving な input isomorphism が存在するが、これを β とする。 $i \in I(c)$ を任意に取り、 $i' := \beta(i) \in I(d)$ とし、 $c' := T(i), d' := T(i')$ とおく。 G -admissible vector field f と $x \in \Delta_{\bowtie}$ に対し

$$\begin{aligned} f_d(x) &= \hat{f}_d(x_d, x_{T(I(d))}) && \text{domain condition} \\ &= \hat{f}_c(x_d, \beta^* x_{T(I(d))}) && \text{pullback condition} \\ &= \hat{f}_c(x_c, x_{T(I(c))}) && x \in \Delta_{\bowtie} \text{ と次関式} \\ &= f_c(x) && \text{domain condition} \end{aligned}$$



が成り立つ。これにより、 $c \bowtie d$ なら、 f の Δ_{\bowtie} への制限 $f|_{\Delta_{\bowtie}}$ について $(f|_{\Delta_{\bowtie}})_c = (f|_{\Delta_{\bowtie}})_d$ が成り立つ。これは即ち $f(\Delta_{\bowtie}) \subset \Delta_{\bowtie}$ ということであり、次が得られたことになる：

1.13 [定理] \bowtie が balanced であるなら、任意の G -admissible vector field f に対し、 Δ_{\bowtie} は f -不変である。

1.14 [注意] 実はこの逆が成り立つ。つまり、同期状態が flow-invariant であることは、coupled cell network の文脈では、 \bowtie が balanced である、と述べられる。 *

1.4 Quotient Network

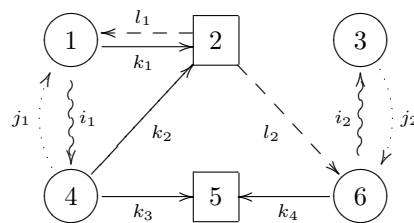
例 1.10 について再考する。2.3 節で書いた表：

Cell	○	■	●	●	■	○				
$I(\cdot)$	j_1	l_1	k_1	k_2	i_2	i_1	k_3	k_4	j_2	l_2
$T(I(\cdot))$	●	■	○	●	○	○	●	○	●	■

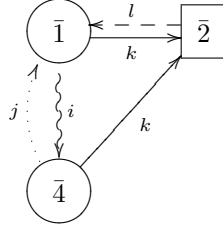
と次の表：

Cell	○	■	●		
$I(\cdot)$	j	l	k	k	i
$T(I(\cdot))$	●	■	○	●	○

とが同一視できるということは自然な考え方である。これは 6-cell network G ：



と、より小さな 3-cell network G' :



とが同一視できることを示唆している。この「同一視」は、 G -admissible vector field の Δ_{\boxtimes} への制限と G' -admissible vector field とが同じ形をしている、という意味で「同一」なのである。実際、例 1.10 で G -admissible vector field を求めたが、この vector field の Δ_{\boxtimes} への制限は

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = f(v_1, v_2, w) \\ \dot{v}_2 = g(w, v_1, v_2) \\ \dot{w} = h(v_2, v_1) \end{cases} \quad \begin{cases} f : V \times V \times W \longrightarrow V, \\ g : W \times V \times V \longrightarrow W, \\ h : V \times V \longrightarrow V \end{cases}$$

という形をしており、これは G' -admissible vector field であることが確かめられる。

以上を踏まえて、quotient network を定義する。

1.15 [定義] balanced な coloring \boxtimes が備わった coupled cell network $G = (\mathcal{C}, \mathcal{E}, \sim_c, \sim_\varepsilon)$ を考える。 G の \boxtimes による quotient network G_{\boxtimes} とは、以下の条件を充たす $\mathcal{C}_{\boxtimes}, \mathcal{E}_{\boxtimes}, \sim_{\mathcal{C}_{\boxtimes}}, \sim_{\mathcal{E}_{\boxtimes}}$ から成る四つ組み $(\mathcal{C}_{\boxtimes}, \mathcal{E}_{\boxtimes}, \sim_{\mathcal{C}_{\boxtimes}}, \sim_{\mathcal{E}_{\boxtimes}})$ のことである :

(i) 2.3 節で述べたように、 $c \in \mathcal{C}$ の同値類を \bar{c} と表すことにし、これら \boxtimes -同値類の集合を \mathcal{C}_{\boxtimes} とする :

$$\mathcal{C}_{\boxtimes} := \mathcal{C} / \boxtimes = \{\bar{c} \mid c \in \mathcal{C}\}.$$

(ii) \sim_c から誘導される \mathcal{C}_{\boxtimes} 上の同値関係を $\sim_{\mathcal{C}_{\boxtimes}}$ とする。つまり $\bar{c} \sim_{\mathcal{C}_{\boxtimes}} \bar{d}$ を、 $c \sim_c d$ であるときと定める。この定義が代表元の選び方によらないのは、 \boxtimes が \sim_c の refinement だからである。

(iii) \mathcal{C} / \boxtimes の代表系を一つとり、 S とする。 \boxtimes は balanced であるから、 $c \boxtimes d$ であるとき $I(c)$ と $I(d)$ は \sim_ε -同値の違いを除いて等しい。そこで $c \in S$ に対し、 $I(\bar{c}) = I(c)$ とみなす。 c の input arrow e を \bar{c} の input arrow とみなすとき、 \bar{e} と記すことにする。quotient network における arrow の集合 \mathcal{E}_{\boxtimes} は

$$\mathcal{E}_{\boxtimes} := \coprod_{c \in S} I(\bar{c})$$

である。

(iv) \mathcal{E}_{\boxtimes} 上の同値関係を $\sim_{\mathcal{E}_{\boxtimes}}$ を

$$\bar{e}_1 \sim_{\mathcal{E}_{\boxtimes}} \bar{e}_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} e_1 \sim_\varepsilon e_2$$

により定める。

(v) $\bar{e} \in \mathcal{E}_{\boxtimes}$ の head および tail を

$$\mathcal{H}(\bar{e}) := \overline{\mathcal{H}(e)}, \quad \mathcal{T}(\bar{e}) := \overline{\mathcal{T}(e)}$$

で定義する。 ◇

1.16 [注意] quotient network においては、consistency condition は自動的に満たされる。

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}(e_1) \sim_c \mathcal{H}(e_2) & \xleftarrow{\mathcal{H}} & e_1 \sim_\varepsilon e_2 & \xrightarrow{\mathcal{T}} & \mathcal{T}(e_1) \sim_c \mathcal{T}(e_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}(\bar{e}_1) \sim_{c_\boxtimes} \mathcal{H}(\bar{e}_2) & \xleftarrow{\mathcal{H}} & \bar{e}_1 \sim_{\varepsilon_\boxtimes} \bar{e}_2 & \xrightarrow{\mathcal{T}} & \mathcal{T}(\bar{e}_1) \sim_{c_\boxtimes} \mathcal{T}(\bar{e}_2) \end{array}$$

上下の写像は商写像である。 *

\mathcal{C}/\boxtimes の代表系 S を用いて、 $c \in S$ に対し、 \bar{c} の internal phase space $P_{\bar{c}}$ を $P_{\bar{c}} := P_c$ で定義する。また、total phase space P_{\boxtimes} を、

$$P_{\boxtimes} := \prod_{c \in S} P_c$$

と定義する。

この節の冒頭で述べた、「同一」に関する主張を述べる。

1.17 [定理] \boxtimes が balanced であるとき、 G -admissible vector field と G_{\boxtimes} -admissible vector field の間には次のような関係がある：

- (a) G -admissible vector field f について、その Δ_{\boxtimes} への制限 $f|_{\Delta_{\boxtimes}}$ は P_{\boxtimes} 上の vector field として G_{\boxtimes} -admissible である。
- (b) G_{\boxtimes} -admissible vector field \bar{f} に対し、 P 上の G -admissible vector field f で、 $\bar{f} = f|_{\Delta_{\boxtimes}}$ なるものが存在する。

定理を証明するために、先ず P 上の G -admissible vector field の Δ_{\boxtimes} への制限が、 P_{\boxtimes} 上の vector field とみなせることについて確認する。埋め込み $\iota : P_{\boxtimes} \rightarrow P$ を

$$(\iota x)_c := x_{\bar{c}}, \quad c \in \mathcal{C}, \quad x \in P_{\boxtimes}$$

で定義する。 ι の像は Δ_{\boxtimes} であるから、 $\iota : P_{\boxtimes} \rightarrow \Delta_{\boxtimes}$ は全単射である。これと、定理 1.13 から、 P 上の G -admissible vector field f に対し P_{\boxtimes} 上の vector field $f|_{\Delta_{\boxtimes}}$ を次のように定義することができる：

$$\begin{array}{ccc} P_{\boxtimes} & \xrightarrow{\iota} & \Delta_{\boxtimes} \\ f|_{\Delta_{\boxtimes}} \downarrow \dots & & \downarrow f \\ P_{\boxtimes} & \xleftarrow{\iota^{-1}} & \Delta_{\boxtimes} \end{array}$$

[定理 1.17(a) の証明] $f|_{\Delta_{\boxtimes}} = \iota^{-1} \circ f \circ \iota$ が定義 1.7 の domain condition と pullback condition を満たすことを示せば良い。

先ず domain condition を確かめる。 $c \in S$, $x \in P_{\boxtimes}$ に対し

$$\begin{aligned} (f|_{\Delta_{\boxtimes}})_{\bar{c}}(x) &= (f|_{\Delta_{\boxtimes}}(x))_{\bar{c}} \\ &= (\iota^{-1}(f(\iota x)))_{\bar{c}} \\ &= (f(\iota x))_c \\ &= f_c(\iota x) \end{aligned}$$

と変形できるが、 f は G -admissible であるから、domain condition により、 $(f|_{\Delta_{\bowtie}})_{\bar{c}}(x)$ は $(ix)_c, (ix)_{\mathcal{T}(I(c))}$ 以外に依らない。これらについて

$$\begin{aligned} (ix)_c &= x_{\bar{c}} \\ (ix)_{\mathcal{T}(I(c))} &= x_{\overline{\mathcal{T}(I(c))}} = x_{\mathcal{T}(\overline{I(c)})} = x_{\mathcal{T}(I(\bar{c}))} \end{aligned}$$

が成り立つから、domain condition は満たされている。

次に pullback condition を確かめる。 $c, d \in \mathcal{S}$, $\beta \in B(\bar{c}, \bar{d})$ を任意に取り、 β の lift を $\tilde{\beta} \in B(c, d)$ とする：

$$\beta(\bar{e}) = \overline{\tilde{\beta}(e)} \quad e \in I(c).$$

$f|_{\Delta_{\bowtie}}$ が domain condition を満たすことは既に見たので、 $(f|_{\Delta_{\bowtie}})_{\bar{d}}(x) = f_d(ix)$ から

$$(f|_{\Delta_{\bowtie}})_{\bar{d}}(x_{\bar{d}}, x_{\mathcal{T}(I(\bar{d}))}) = f_d((ix)_d, (ix)_{\mathcal{T}(I(d))})$$

がわかる。 f は G -admissible であるから、pullback condition により

$$f_d((ix)_d, (ix)_{\mathcal{T}(I(d))}) = f_c((ix)_d, (\tilde{\beta}^*(ix))_{\mathcal{T}(I(d))})$$

が成り立つが、任意の $e \in I(d)$ に対し

$$\begin{aligned} (\tilde{\beta}^*(ix))_{\mathcal{T}(e)} &= (ix)_{\mathcal{T}(\tilde{\beta}(e))} \\ &= x_{\mathcal{T}(\overline{\tilde{\beta}(e)})} \\ &= x_{\mathcal{T}(\beta(\bar{e}))} \\ &= (\beta^*x)_{\mathcal{T}(\bar{e})} \\ &= (\iota(\beta^*x))_{\mathcal{T}(e)} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} f_c((ix)_d, (\tilde{\beta}^*(ix))_{\mathcal{T}(I(d))}) &= f_c((ix)_d, (\iota(\beta^*x))_{\mathcal{T}(I(d))}) \\ &= (f|_{\Delta_{\bowtie}})_{\bar{c}}(x_{\bar{d}}, (\beta^*x)_{\mathcal{T}(I(\bar{d}))}) \end{aligned}$$

である。これで pullback condition が確かめられた。

以上により、 $f|_{\Delta_{\bowtie}}$ は P_{\bowtie} 上の vector field として G_{\bowtie} -admissible である。 □

[定理 1.17(b) の証明] G_{\bowtie} -admissible vector field \bar{f} から得られる ODE :

$$\dot{x}_{\bar{c}} = \bar{f}_{\bar{c}}(x_{\bar{c}}, x_{\mathcal{T}(I(\bar{c}))}) \quad c \in \mathcal{S}$$

を用い、 $c' \in \bar{c}$ に対して

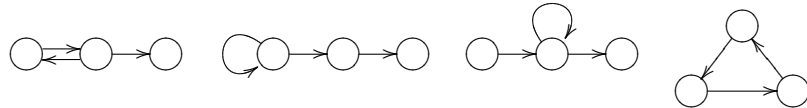
$$\dot{x}_{c'} = \bar{f}_{\bar{c}}(x_{c'}, x_{\mathcal{T}(I(c'))})$$

とすることで、 P 上の vector field f を定義する。こうして得られた f について $f|_{\Delta_{\bowtie}} = \bar{f}$ が成り立つ。 f の定め方から、domain condition は満たされている。 G_{\bowtie} における input isomorphism が G における input isomorphism の projection であることから、 \bar{f} についての pullback condition から f についての pullback condition が出る。よって f は G -admissible vector field である。 □

1.5 Homogeneous Network

1.18 [定義] 任意の $c, d \in \mathcal{C}$ に対し $B(c, d) \neq \emptyset$ であるような network を homogeneous network と呼ぶ。すべての edge が $\sim_{\mathcal{E}}$ -同値であるような homogeneous network を identical-edge homogeneous network と呼び、input set に含まれる edge の個数を network の価数と呼ぶ。◇

例えば、価数 1 の identical-edge homogeneous 3-cell network は次の 4 つ：



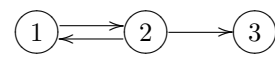
これは単に全ての場合を数え上げて良いが^{*1}、見通しを良くするため次のような記法を用いる：

1.19 [定義] $c, d \in \mathcal{C}$ に対し

$$a_{cd} := \#\{i \in I(c) \mid \mathcal{T}(i) = d\}$$

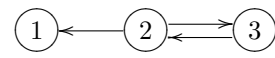
とし、 $A = (a_{cd})_{c,d \in \mathcal{C}}$ とおく。◇

この表記に従えば、次のように書ける：



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

この network と次の network は同一視されるべきものである：



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

この二つの network が、Cell 1 と Cell 3 が置換されているという関係に注意して、次のような同一視を行うことにする。

1.20 [定義] 二つの行列が isomorphic であるとは、それらが置換行列による共役関係にあるときにいう。◇

先程の例では以下の通り：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

この観点から、network を数え上げる。

1.21 [定理] 価数 1 の identical-edge homogeneous 3-cell network は 4 つ存在する。

^{*1} 価数が 1 だから、各 cell に対し input set の tail の個数は 1 個である。この選び方が 3 通り考えられるから、network の個数は高々 $3^3 = 27$ 個である。このうち、3-cell network になっていないものや、重複を排せば良い。

[証明] 価数が1であるから、network に付随する行列の各行は、ある成分のみが1でその他の成分は0である。そこで、network が self-coupling を持つか持たないかで場合分けをする。

self-coupling を持つ場合 もし複数の cell が self-coupling を持てば、その何れかは network と繋がっていないので、self-coupling を持つ cell は一つである。そこでその cell を Cell 1 と仮定する：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{21} = a_{31} = 0$ であれば、Cell 1 は network と繋がっていない。そこで、必要があれば isomorphic なものを考えることにより、 $a_{21} = 1$ と仮定する。よって、次の二通りを考えれば良い：

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

固有値に付随する固有空間を考えれば、 A_1 と A_2 が isomorphic でないとわかる。

self-coupling を持たない場合 この場合付随する行列の対角成分はすべて0である。一般性を失うことなく $a_{21} = 1$ と仮定できる。

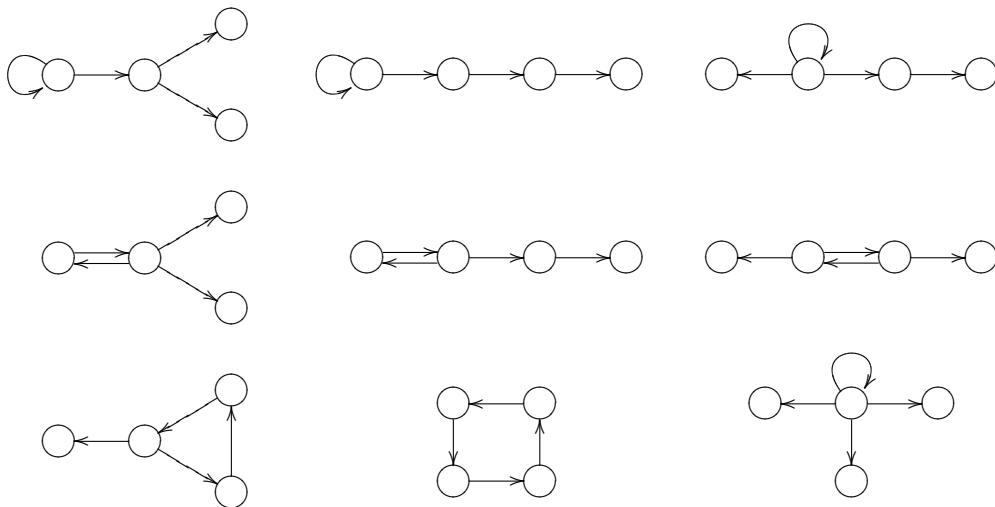
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

よって、次の四通りを考えれば良い：

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このうち、 A_3, A_4, A_5 は互いに isomorphic なので、self-coupling を持たないものは二通り存在する。 □

価数1の4-cell network は次の通り：



価数2の3-cell network は34個ある [4]。network の個数は cell や価数の増加とともに指数関数的に増加し、例えば価数6の identical-edge homogeneous 6-cell network は 13,505,066,262,007 個である [1]。

1.6 NN Coupling, NNN Coupling

この節では \mathbb{Z}^2 -lattice 上の結合系について考える ($\mathcal{C} = \mathbb{Z}^2$)。

1.22 [定義] \mathbb{Z}^2 -lattice 上の identical-edge homogeneous network は、任意の $(m, n) \in \mathcal{C}$ について

$$\mathcal{T}(I(m, n)) = \{(m+1, n), (m-1, n), (m, n+1), (m, n-1)\}$$

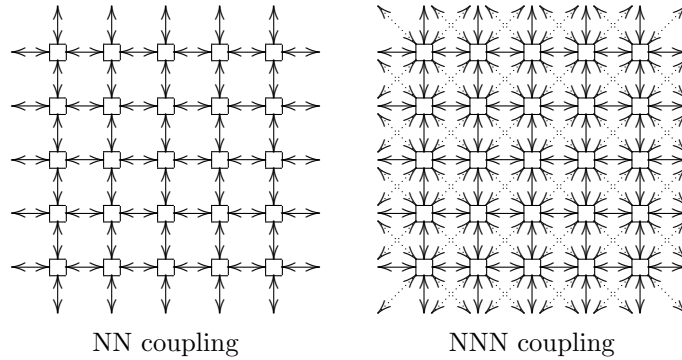
であるとき、nearest neighbor (NN) 結合系と呼ばれる。更に、 \mathbb{Z}^2 -lattice 上の homogeneous network は、任意の $(m, n) \in \mathcal{C}$ について

$$I(m, n) = \{i_1, i_2, i_3, i_4, j_1, j_2, j_3, j_4\} \quad i_1 \sim_{\mathcal{E}} i_2 \sim_{\mathcal{E}} i_3 \sim_{\mathcal{E}} i_4, j_1 \sim_{\mathcal{E}} j_2 \sim_{\mathcal{E}} j_3 \sim_{\mathcal{E}} j_4$$

かつ

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\{i_1, i_2, i_3, i_4\} &= \{(m+1, n), (m-1, n), (m, n+1), (m, n-1)\} \\ \mathcal{T}\{j_1, j_2, j_3, j_4\} &= \{(m+1, n+1), (m-1, n+1), (m+1, n-1), (m-1, n-1)\} \end{aligned}$$

であるとき、next nearest neighbor (NNN) 結合系と呼ばれる。◇



NN 結合系及び NNN 結合系上の balanced 2-coloring について、次のことが成り立つ：

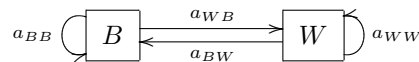
1.23 [定理] NN 結合系上の balanced 2-coloring は 8 種類の周期的なパターンと、2 種類の無限系列から成る。また、NNN 結合系上の balanced 2-coloring は 12 種類の周期的なパターンから成る。

以下、NN 結合系上の balanced 2-coloring について考える。

\mathcal{C} は black (B) と white (W) の二色に塗り分けられているとする： $\mathcal{C}/\cong = \{B, W\}$ 。NN 結合系は価数 4 であるから

$$a_{BB} + a_{BW} = a_{WB} + a_{WW} = 4$$

が成り立つ。



a_{BB}, a_{WW} の値を定めれば、quotient network は定まる。この定め方は単純に考えれば 25 通りあるが、片方が 4 だと network が形成されない*2。また、 $a_{BB} = 1, a_{WW} = 0$ という場合と $a_{BB} = 0, a_{WW} = 1$ という場合とは、色の塗り方を反転させれば同じものである。従って考えるべき場合は以下の 10 通りである：

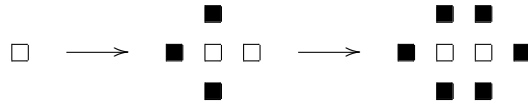
$$(a_{BB}, a_{WW}) = (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)$$

与えられた組 (a_{BB}, a_{WW}) の条件を充たすように network を構成するには、以下の規則に従って black cell と white cell とを配置すれば良い：

- black cell の周囲の 4 つの cell のうち、 a_{BB} 個が black cell である。
- white cell の周囲の 4 つの cell のうち、 a_{WW} 個が white cell である。

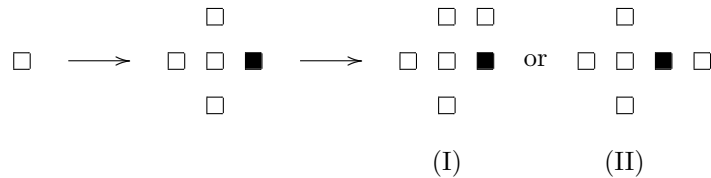
例えば $a_{BB} = 0$ というのは、black cell の周囲がすべて white cell でなければならないということである。

先程挙げた 10 通りのうち、 $(a_{BB}, a_{WW}) = (0, 1)$ を充たす network は存在しないので、先ずこのことを示す。

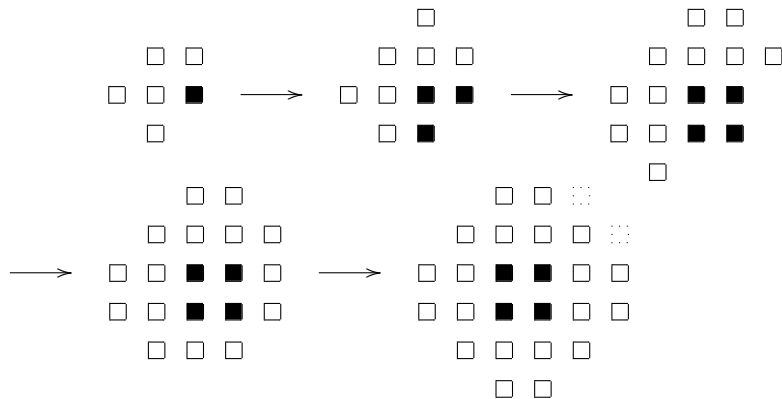


white cell の周囲の 4 つの cell のうち、一つは white cell でなければならない。この新たに配置された white cell についても同様のことが成り立つが、元々あった white cell が隣接しているので、残る 3 つはすべて black cell でなければならない。ところが、このとき black cell 同士が隣接してしまい、 $a_{BB} = 0$ に反する。

先程の場合では network が存在しなかったが、残る場合に関しても同様にチェックしていけば良い。例えば $(a_{BB}, a_{WW}) = (2, 3)$ の場合を考える。

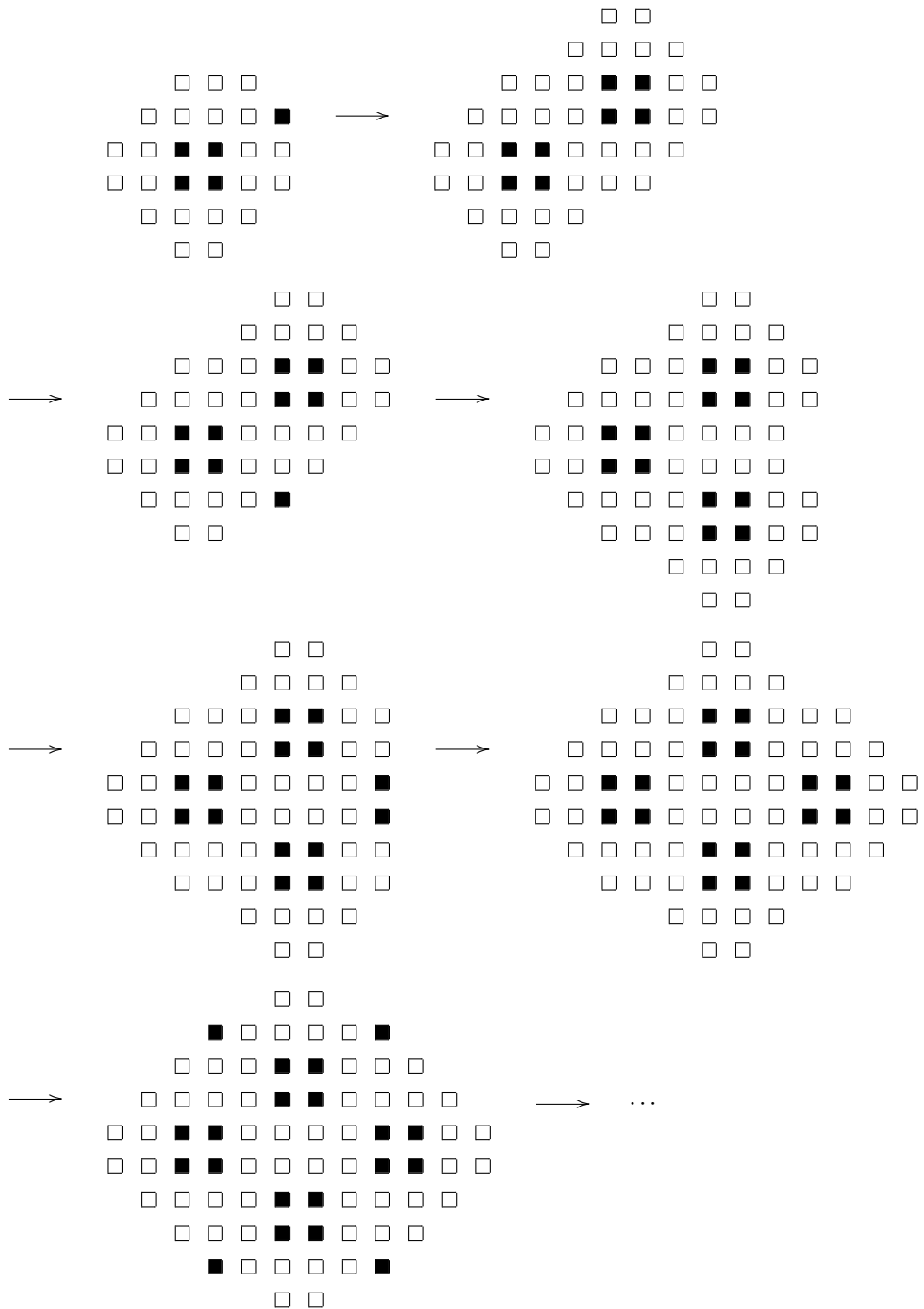


上記のように、white cell の周りの black cell の位置で場合が分かれる。(I) の場合

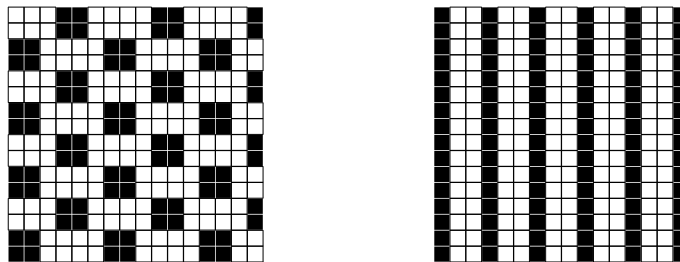


*2 例えば、 $a_{BB} = 4$ とすると、black cell の周囲の 4 つの cell はすべて black でなければならない。周囲の black cell についても同じことが言えるので、結局 C のすべての cell が black となり、2-coloring でなくなる。

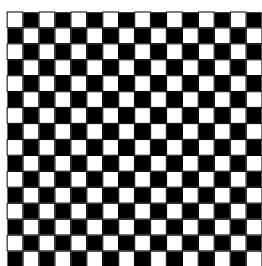
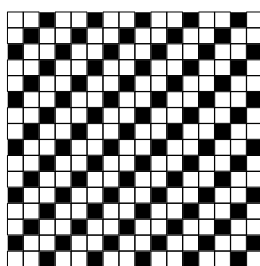
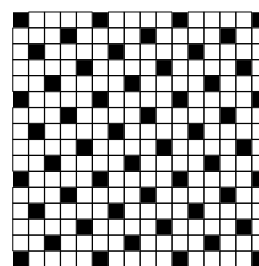
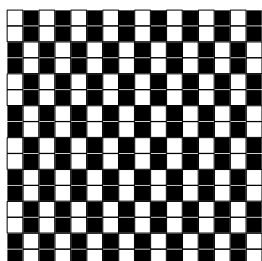
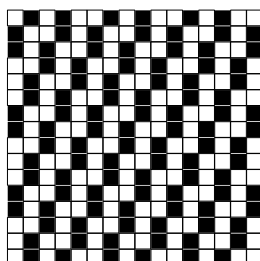
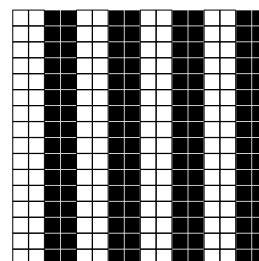
二つある \blacksquare の何れか一方は black cell でなければならないが、対称性からどちらが black cell でも良い。右下の \blacksquare を black cell とすると、(I) の形が現れていることに着目して、今までの配置を繰り返して



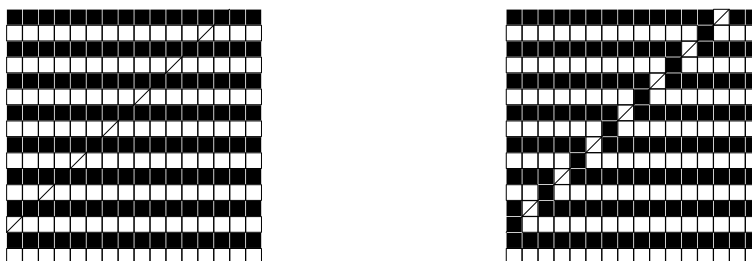
(II) の場合も同様にすれば良く、次のようなパターンが得られる：



残る 8 通りのうち、 $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 3)$ についても、同様の議論を行えば、次のパターンが得られる：

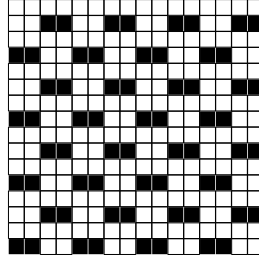
 $(0,0)$  $(0,2)$  $(0,3)$  $(1,1)$  $(1,2)$  $(3,3)$

これで定理 1.23 で述べた 8 種類の周期的なパターンがわかった。 $(1, 3)$, $(2, 2)$ が「無限系列」に対応するが、この「無限系列」について述べる。



$(2, 2)$ のパターンとして左のパターンが考えられるが、図中に示した「対角線」に沿って black と white とを入れ替えた右側のパターンもまた balanced なパターンである。black と white とが交互に並んでいるような対角線のことを “alternating diagonal”、alternating diagonal に沿ったこの色の入れ替えを “diagonal trick” と呼ぶことにする。左のパターンを基本として、diagonal trick を繰り返せば種類の異なるパターンが無限に

得られるが、これを「無限系列」と呼んでいたのである。(1, 3) の基本パターンは次の通り：



以下、(2, 2) のパターンのすべてが、基本パターンに高々可算回の diagonal trick を用いて得られることを示す。先ず次の補題を証明する。

1.24 [補題] $(a_{BB}, a_{WW}) = (2, 2)$ であるような balanced なパターンに、diagonal trick を用いて得られる新たなパターンは、また balanced であり $(a_{BB}, a_{WW}) = (2, 2)$ が成り立つ。

[証明] ある cell c の色を変えたときに、 (a_{BB}, a_{WW}) の値が変わるか変わらないかは次の点に注意すれば良い：

1. c の周囲の cell の色。
2. 周囲の cell に及ぼす c の色の影響。

$(a_{BB}, a_{WW}) = (2, 2)$ だから、cell が black であっても white であっても、その周囲には 2 個ずつの black cell と white cell とが存在する。従って、diagonal trick を用いても、1. は問題とならない。2. について考える。diagonal trick によって影響を受ける cell は、alternating diagonal に隣接する二本の対角線上にある cell である。これらの各 cell に対し、alternating diagonal は black cell と white cell とを 1 個ずつ「供給」している。diagonal trick は alternating diagonal 上の色を反転するものであるから、この関係は diagonal trick で変わらない。よって、2. も問題とならない。従って diagonal trick は (a_{BB}, a_{WW}) の値を変えない。□

この証明は $(a_{BB}, a_{WW}) = (1, 3)$ の場合に対しても、全く同様に行える。

$(a_{BB}, a_{WW}) = (2, 2)$ である任意のパターンは、diagonal trick を高々可算回用いることで、先程示した基本パターンに帰着できることを示す。このために次の補題を用いる。

1.25 [補題] ある対角線が alternating であるなら、この対角線に隣接する二本の対角線はどちらも alternating である。また、ある対角線が alternating でないなら、この対角線に垂直な対角線で alternating なものが存在する。

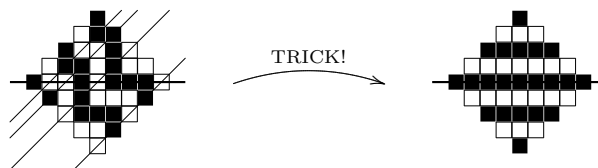
この補題から即座に次が従う。

1.26 [系] 対角線は、傾きが 1 か -1 かで二種類に分けられるが、すくなくとも一方はすべて alternating である。

基本パターンに帰着させる具体的な方法は次の通り：

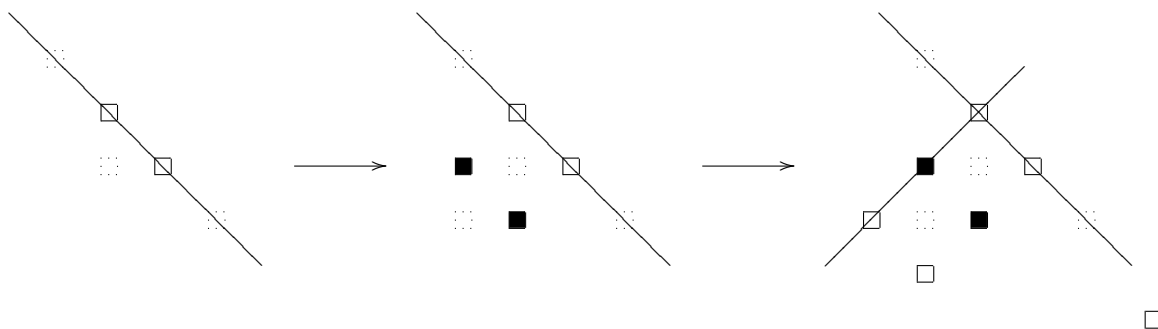
1. $C = \mathbb{Z}^2$ の行を任意に一つ指定する。
2. 指定した行が一色になるように diagonal trick を行う。

3. white cellのみから成る行と black cellのみから成る行ができる。



[補題 1.25 の証明] 先ず前半を証明するため、alternating diagonal に隣接する対角線が alternating でないと仮定する。alternating でない対角線上には同じ色が連続している部分が存在するが、この部分から連続する cell を 2 つ取り、これらを input set として持つ cell を考える。この cell の周りには同じ色が 3 つあることになり、 $(a_{BB}, a_{WW}) = (2, 2)$ に矛盾する。

次に後半を証明する。先程も述べたように、alternating でない対角線上には同じ色が連続している部分が存在する。一般性を失うことなく、これらを white と仮定できる。この部分から連続する cell を 2 つ取り、これらを input set として持つ cell を考える。この cell の周りには既に 2 つの white cell が存在するから、残る 2 つは black である。この 2 つの black cell を input set として持つ cell を考えると、まったく同じようにして周囲の残る 2 つの cell は white であることがわかる。この議論を繰り返すことで、最初の対角線に垂直な alternating diagonal が得られる。



–REFERENCES–

- [1] F. A. M. Aldosray and I. Stewart. Enumeration of homogeneous coupled cell networks. *Internat. J. Bif. Chaos.* 15 (2005) 2361-2373.
- [2] F. Antoneli, A. P. S. Dias, M. Golubitsky and Y. Wang. Synchrony in Lattice Differential Equations. *CMUP 2006-25 preprint.*
- [3] M. Golubitsky and I. Stewart. Nonlinear dynamics of networks: the groupoid formalism. *Bull. Amer. Math. Soc.* 43(2006), 305-364.
- [4] M. Golubitsky, I. Stewart and A. Török. Patterns of synchrony in coupled cell networks with multiple arrows. *SIAM J. Appl. Dynam. Sys.* 4 (1) (2005) 78-100.
- [5] P. J. Higgins, *Notes on Category and Groupoids*, Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies 32, Van Nostrand Reinhold, London, 1971.
- [6] M. C. A. Leite and M. Golubitsky. Homogeneous Three-cell Networks. *Nonlinearity.* 19 (2006) 2313-2363.
- [7] I. Stewart, M. Golubitsky and M. Pivato. Symmetry groupoids and patterns of synchrony in coupled

cell networks. *SIAM J. Appl. Dynam. Sys.* 2 (4) (2003) 609-646.

- [8] Y. Wang and M. Golubitsky. Two-color patterns of synchrony in lattice dynamical systems. *Nonlinearity*. 18 (2005) 631-657.