coupled cell network と遊ぶ（6）

nohmi

February 7, 2008

NN Coupling とは？

NN Coupling

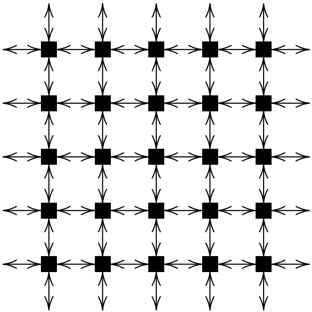
$\mathbb{Z}^2$-lattice 上の identical-edge homogeneous network は、任意の $(m,n) \in \mathcal{C}$ について

$$\mathcal{T}\big(I(m,n)\big) = \big\{(m+1,n),(m-1,n),(m,n+1),(m,n-1)\big\}$$

であるとき、nearest neighbor (NN) 結合系と呼ばれる。

概観

edge も cell もそれぞれ一種類のみで、各 cell が上下左右の cell と繋がっている。



重要な事実

定理

NN 結合系上の balanced 2-coloring は 8 種類の周期的なパターンと、2 種類の無限系列から成る。

準備

- $\mathcal{C}$ は black (B) と white (W) の二色に塗り分けられているとする：

$$\mathcal{C}/\bowtie = \{B, W\} = \{\blacksquare, \square\}.$$

準備

- $\mathcal{C}$ は black (B) と white (W) の二色に塗り分けられているとする：

$$\mathcal{C}/\bowtie = \{B, W\} = \{\blacksquare, \square\}.$$

- NN 結合系は価数 4 であるから

$$a_{BB} + a_{BW} = a_{WB} + a_{WW} = 4$$

が成り立つ。

準備

- a_{BB}, a_{WW} の値を定めれば、quotient network は定まる。

準備

- a_{BB}, a_{WW} の値を定めれば、quotient network は定まる。
- この定め方は単純に考えれば 25 通りあるが、片方が 4 だと network が形成されない。

準備

- a_{BB}, a_{WW} の値を定めれば、quotient network は定まる。
- この定め方は単純に考えれば 25 通りあるが、片方が 4 だと network が形成されない。
- また、$a_{BB} = 1, a_{WW} = 0$ という場合と $a_{BB} = 0, a_{WW} = 1$ という場合とは、色の塗り方を反転させれば同じものである。

準備

- a_{BB}, a_{WW} の値を定めれば、quotient network は定まる。
- この定め方は単純に考えれば 25 通りあるが、片方が 4 だと network が形成されない。
- また、$a_{BB} = 1, a_{WW} = 0$ という場合と $a_{BB} = 0, a_{WW} = 1$ という場合とは、色の塗り方を反転させれば同じものである。
- 従って考えるべき場合は以下の 10 通り：

$$(a_{BB}, a_{WW}) = (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3).$$

準備

充たすべき規則：

- black cell の周囲の 4 つの cell のうち、a_{BB} 個が black cell。
- white cell の周囲の 4 つの cell のうち、a_{WW} 個が white cell。

準備

充たすべき規則：

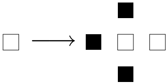
- black cell の周囲の 4 つの cell のうち、a_{BB} 個が black cell。
- white cell の周囲の 4 つの cell のうち、a_{WW} 個が white cell。

例えば $a_{BB} = 0$ というのは、black cell の周囲がすべて white cell でなければならないということである。

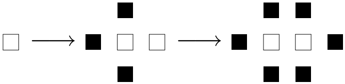
$(a_{BB}, a_{WW}) = (0, 1)$

$\square$

$(a_{BB}, a_{WW}) = (0, 1)$

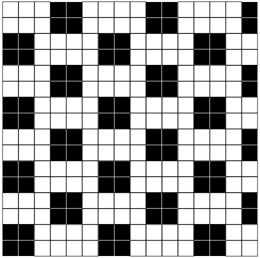


$(a_{BB}, a_{WW}) = (0, 1)$

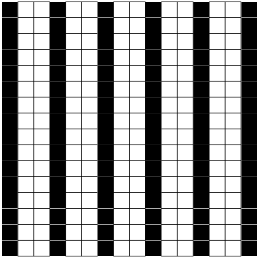


black cell が隣接 $\Longrightarrow a_{BB} = 0$ に反する。

$(a_{BB}, a_{WW}) = (2, 3)$

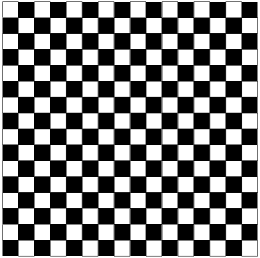


(2,3) I

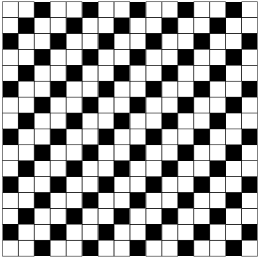


(2,3) II

others

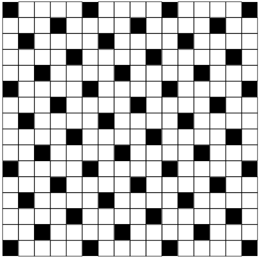


(0,0)

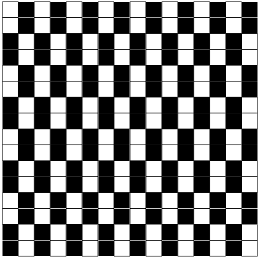


(0,2)

others

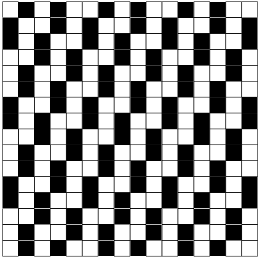


(0,3)

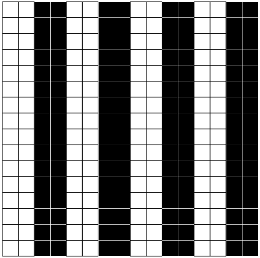


(1,1)

others

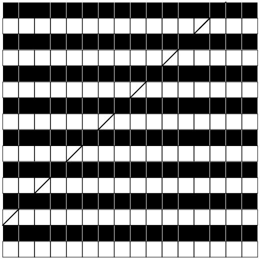


(1,2)



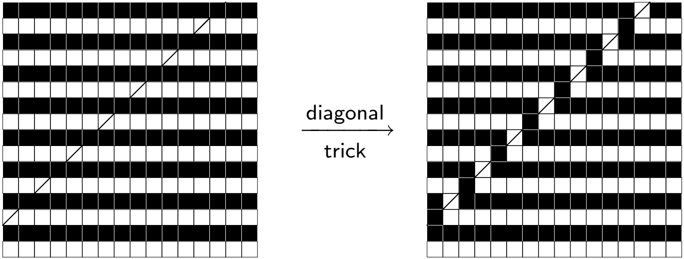
(3,3)

diagonal trick



(2,2) の一例

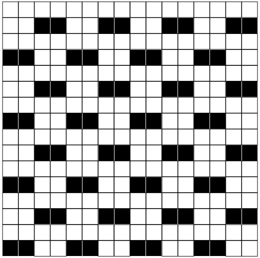
diagonal trick



(2,2) の一例

対角線に沿って白黒を入れ替えても、やはり (2,2) の一例である。

(1,3) の基本パターン



diagonal trick を繰り返して、無限のパターンを得る。